Análisis Matemático I. Primer curso de Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación.

# HOJA 1

## Tema 1: Introducción a los números reales. Supremo e ínfimo. El Método de Inducción Matemática. Desigualdades y valor absoluto.

**1.-** Indicar en la recta real todos los valores de $x$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(1) $|x+1| > 3$,

(2) $|2x+1| < 1$,

(3) $|x-1| \leq |x+1|$,

(4) $x^2 - 4x + 6 < x$,

(5) $|x^2 - 3| \leq 1$,

(6) $\frac{x^2}{x^2-4} < 0$,

(7) $\frac{x-1}{x+2} > 0$,

(8) $|(x-2)(x-3)| < 1$,

(9) $|x-1| + |x-2| > 1$,

(10) $\frac{|x+1|}{|x-1|} \geq 1$.

**2.-** Demostrar por inducción:

(1) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(2) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(3) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

(4) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

(5) $\forall\, n \geq 10$, $2^n \geq n^3$.

(6) $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y$.

(7) El número de rectas determinado por $n \geq 2$ puntos, de los cuales ningún trío pertenece a la misma recta, es $\frac{1}{2}n(n-1)$.

(8) $4(1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n) + 1 = 5^{n+1}$.

(9) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$.

(10) $(*)$ Si $n$ no es múltiplo de 4 la suma $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ es múltiplo de 10. (Comprobarlo para $n = 1, 2, 3$ y demostrar que si es cierto para $n$, lo es para $n + 4$.)

(11) $n(n^2 + 5)$ es divisible por 6.

(12) $1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1)\,(n-1)! = n!$ para $n \geq 2$.

**3.-** $(*)$ Demostrar que para todo número natural $n$ y $a$ y $b$ cualesquiera se cumple

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ y } 0! = 1.$$

**Indicación.** Demostrar primero que $\binom{i}{k-1} + \binom{i}{k} = \binom{i+1}{k}$.

**4.-** Demostrar por inducción sobre $n$ que

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad \text{si } r \neq 1.$$

**5.-** Demostrar la desigualdad de Bernoulli

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad \text{para } x \geq -1.$$

**6.-** Sean $a, b$ dos números no negativos, con $a \leq b$. Demostrar que

$$a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2} \leq b.$$

**7.-** Encontrar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales. ¿Son máximo o mínimo en algún caso?

(1) $A = \{x : x^2 < 4\}$,

(2) $B = \{x : x^2 \geq 4\}$,

(3) $C = \{x : 2 < x^2 \leq 4\}$,

(4) $D = \{\frac{n-1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$,

(5) $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,

(6) $F = E \cup \{0\}$,

(7) $G = \{\frac{1}{n} - (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$,

(8) $H = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, \ x^2 \leq 3\}$.

**8.-** Si el conjunto $A$ tiene supremo, ¿qué podemos decir sobre $-A = \{-x : x \in A\}$?

**9.-** Sean $A$ y $B$ dos subconjuntos no vacíos de números reales tales que $a < b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que existen $\sup A$, $\text{ínf}\, B$, y que además, $\sup A \leq \text{ínf}\, B$. Dar un ejemplo donde estos dos valores coincidan.

**Comentario:** $(*)$ ejercicio difícil